

3674. a) $m = 2$, $\mathbf{n}(2; -1) \Rightarrow 2x - y = 2$; b) $3x - 5y = 21$; c) $\mathbf{n}(3; 1) \Rightarrow 3x + y = -\frac{85}{12}$;

d) $\mathbf{n}(4; -3)$, $4x - 3y = 7\sqrt{2}$.

3675. a) $m = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$; b) $\mathbf{n}(b; a)$, $\mathbf{n}'(a; -b) \Rightarrow ax - by = 0$; c) $\mathbf{n}(1; -1) \Rightarrow \mathbf{n}'(1; 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y = 7$; d) $4x - 3y = 12$; e) $2x - 9y = 41$; f) $2x + 3y = 5$; g) $x = -4$; h) $P\left(1; -\frac{17}{3}\right)$,

$\mathbf{n}(4; 3) \Rightarrow \mathbf{n}'(3; -4) \Rightarrow 3x - 4y = \frac{77}{3}$.

3676. a) $\frac{15}{8} = \frac{3}{p} \Rightarrow p = \frac{8}{5}$. Ebből a két egyenes: $15x - 8y = 35$, illetve $15x - 8y = -q$. Két

különböző egyenest kapunk, ha $q \in \mathbf{R} \setminus \{-35\}$. b) $\frac{15}{8} \cdot \frac{3}{p} = -1 \Rightarrow p = -\frac{45}{8}$, $q \in \mathbf{R}$.

3677. $T(a; b)$.

3678. $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 4a^2 + a = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{4}$; az $a_2 = 0$, nem felel meg a feladat feltételeinek.

3679. a) $\overrightarrow{AB}(1; 5) \Rightarrow \mathbf{n}(5; -1) \Rightarrow 5x - y = 0$; b) $\mathbf{n} = \overrightarrow{BA}(8; 7) \Rightarrow 8x + 7y = -4$;

c) $\overrightarrow{AB}(0; 8) \Rightarrow \mathbf{n}(1; 0) \Rightarrow x = 5$, továbbá $\mathbf{n}(0; 1) \Rightarrow y = 3$.

3680. $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}(x - 4; 9) \Rightarrow \mathbf{n}(9; 4 - x)$, $\mathbf{n}'(4; 3)$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 36 + 3(4 - x) = 0 \Rightarrow x = -32$.

3681. $\overrightarrow{AB}(10; y - 4)$, $\mathbf{n}(4; 3)$, $\overrightarrow{AB} \perp \mathbf{n} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n} = 0$, $40 + 3(y - 4) = 0 \Rightarrow y = -\frac{28}{3}$.

3682. $2x - 3y = -11$, $3x + 2y = 16$.

3683. a) $e: x - 3y = -1$, $f: x + y = 10$. $e \cap f: \left. \begin{matrix} x - 3y = -1 \\ x + y = 10 \end{matrix} \right\} \Rightarrow M(7,25; 2,75)$; $\alpha = 63,4^\circ$.

b) $e: 13x + 5y = 0$. $f: 3x + 2y = -1$. $e \cap f: N\left(\frac{5}{11}; -\frac{13}{11}\right)$; $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1 = 13 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 49$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{194}$,
 $|\mathbf{n}'| = \sqrt{13}$, $49 = \sqrt{194} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \alpha = 12,6^\circ$.

3684. a) $F_{AB}\left(-2; \frac{19}{3}\right)$. b) $F_{AB}\left(\frac{10}{3}; 2\right)$.

3685. a) $F(-4; 1)$, $\overrightarrow{AB}(2; 6) \Rightarrow \mathbf{n}(1; 3) \Rightarrow x + 3y = -1$; b) $2x - 8y = 17$; c) $2x + 1 = 0$;
d) $y = 6$.

3686. AB felezőmerőlegese: $8x + y = 42$, amelyet a P pont koordinátái kielégítenek, tehát igaz az állítás.

3687. Az AB felezőmerőlegésének és az adott egyenesnek a metszéspontja adja a megálló helyét. AB felezőmerőlegese: $x + y = 7$. $\left. \begin{matrix} x + y = 7 \\ 2x - 3y = 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow M\left(\frac{23}{5}; \frac{12}{5}\right)$. $AM \approx 2,3$ km.

3688. Az első egyenes az y tengelyt az $E_1(0; -2)$ pontban, a második egyenes az $E_2(0; -4)$ pontban metszi. $F(0; -3)$. A középpárhuzamos: $5x - 3y = 9$. $P(3; 2)$.

3689. A feladat feltételeinek két egyenes felel meg: $e_1 \parallel PQ$ és $e_2 = AF_{PQ}$. $\overrightarrow{PQ}(12; -6) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \mathbf{n}(1; 2) \Rightarrow e_1: x + 2y = 17$; $F_{PQ}(3; 2)$, $\overrightarrow{AF}(2; -6) \Rightarrow \mathbf{n}(3; 1) \Rightarrow e_2: 3x + y = 11$.

3690. a) Két ilyen egyenes van: $x - 6y + 59 = 0$, illetve $13x - 2y = 69$. b) $4x - 3y + 2 = 0$, illetve $3x - 2y + 1 = 0$.

3691. $\vec{CB}(5; 2)$, $\vec{CA}(4; -10)$, $\vec{CB} \cdot \vec{CA} = 0 \Rightarrow$ a háromszög derékszögű. Keressünk többféle megoldást is.

3692. $\mathbf{n}(8; 5)$. Legyen O az origó, $K(0; 8)$ az átfogó felezőpontja. Ekkor $\vec{OC} = \vec{OK} + \mathbf{n} \Rightarrow \vec{OC}(8; 13)$, $C(8; 13)$. $\mathbf{n}'(-5; 8)$ az \mathbf{n} 90° -os elforgatottja. $\vec{OA} = \vec{OK} + \mathbf{n}'$, $\vec{OA}(-5; 16)$.

$A(-5; 16)$. A -t K -ra tükrözve kapjuk a $B(5; 0)$ csúcst. AC egyenlete: $\vec{AC}(13; -3)$, $\mathbf{n}(3; 13) \Rightarrow 3x + 13y = 193$, BC egyenlete: $\vec{BC}(3; 13)$, $\mathbf{n}(13; -3) \Rightarrow 13x - 3y = 65$. C csúcst K -ra tükrözve is megoldást kapunk. Végtelen sok megoldás létezik, mert $\vec{OC} = \vec{OA} + k \cdot \mathbf{n}$ is megoldást ad, ahol $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

3693. I. megoldás: AM egyenes egyenlete $y - 2 = m(x + 4)$. BM egyenes egyenlete:

$$y + 6 = -\frac{1}{m}(x - 2). \quad y = mx + 4m + 2 \Rightarrow B(0; 4m + 2).$$

$$4m + 2 = \frac{2}{m} + 6 \Rightarrow y = -\frac{1}{m}x + \frac{2}{m} + 6 \Rightarrow B\left(0; \frac{2}{m} + 6\right), \quad 2m^2 + 4m - 1 = 0.$$

$$m_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{6}}{4} \Rightarrow M_1\left(0; 2(\sqrt{6} - 1)\right), \quad m_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{6}}{4} \Rightarrow M_2\left(0; -2(\sqrt{6} + 1)\right).$$

II. megoldás: $\vec{BM}(-2; y + 6)$. $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk B koordinátáit.

III. megoldás: $AM^2 = 4^2 + (y - 2)^2$, $BM^2 = 4 + (y + 6)^2$, $AB^2 = 36 + 64$. Pitagorasz tételét alkalmazva $AM^2 + BM^2 = AB^2$. Az egyenlet megoldásával megkapjuk M koordinátáit.

3694. $x + 3y = 13$.

3695. Az adott pont és az adott befogó egyenes távolsága adja a befogó hosszát, amelyből a kívánt magasság kiszámítható. A befogó egyenlete: $2x + y = 2$. $BC \cap AC = C$; $C(-1; 4)$.

$$AC = 4\sqrt{5}, \quad m = 2\sqrt{10}.$$

$$\mathbf{3696.} \quad C\left(\frac{22}{5}; \frac{6}{5}\right).$$

3697. $A(4; 2)$, $B(8; b)$, $C(-2; c)$. $\vec{CA}(6; 2 - c)$, $\vec{CB}(10; b - c)$. $\vec{CA} \perp \vec{CB} \Rightarrow \vec{CA} \cdot \vec{CB} = 60 + (2 - c)(b - c) = 0 \Rightarrow c^2 - (b + 2)c + 2b + 60 = 0$. Akkor létezik a feltételnek megfelelő háromszög, ha az egyenletnek legalább egy valós megoldása van, vagyis $D \geq 0$,

$$D = (b + 2)^2 - 4(2b + 60) \geq 0 \Rightarrow b \geq 2 + 4\sqrt{15} \quad \text{vagy} \quad b \leq 2 - 4\sqrt{15}.$$

3698. Ha a kocka éle a , akkor a befogók: a és $a\sqrt{2}$. Legyen $A(a; 0)$, $B(0; a\sqrt{2})$, $C(0; 0)$.

$$\text{Ekkor } A_1\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right), \quad C_1\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right), \quad \vec{AA_1}\left(-a; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right), \quad \vec{CC_1}\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\vec{AA_1} \cdot \vec{CC_1} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow \vec{AA_1} \perp \vec{CC_1}.$$

3699. Legyen $A(0; a\sqrt{3})$, $B(-a; 0)$, $C(a; 0)$. $S\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$. SC felezőpontja $F_1\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$.

$f_1: \mathbf{n}(3; -\sqrt{3}), F_1\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{6}\right) \Rightarrow 3x - \sqrt{3}y = a, y = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{3}. H\left(\frac{a}{3}; 0\right)$ a BC oldal harmadolópontja. Ugyanígy f_2 egyenletét kielégítik a másik harmadolópont koordinátái.

3700. $A(9; 0), B(-3; -6)$.

3701. Legyen $A(0; a), B(b; 0), C(-b; 0) \Rightarrow D(0; 0). \overrightarrow{AC}(b; a), \mathbf{n}(a; -b), AC: ax - by = -ab,$
 $DE: bx + ay = 0. DE \cap AC = E; \left. \begin{array}{l} ax - by = -ab \quad | \cdot a \\ bx + ay = 0 \quad | \cdot b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2x - aby = -a^2b \\ b^2x + aby = 0 \end{array} \right\} + \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = -\frac{a^2b}{a^2+b^2} \Rightarrow y = \frac{ab^2}{a^2+b^2}, E\left(-\frac{a^2b}{a^2+b^2}; \frac{ab^2}{a^2+b^2}\right), F\left(-\frac{a^2b}{2(a^2+b^2)}; \frac{ab^2}{2(a^2+b^2)}\right).$$

$$\overrightarrow{EB}\left(\frac{2a^2b+b^3}{a^2+b^2}; -\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right), \overrightarrow{FA}\left(\frac{a^2b}{2(a^2+b^2)}; \frac{2a^3+ab^2}{2(a^2+b^2)}\right), \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{EB} \perp \overrightarrow{FA}.$$

3702. AT egyenlete $y = 1$. Mivel $BC \perp AT$, BC egyenlete $x = 16$. Ezért $F(16; 13), B(16; b), C(16; c)$. F a BC felezőpontja: $c = 26 - b. AB = BC \Rightarrow b^2 - 34b + 117 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow B_1(16; 17 + 2\sqrt{43}), C_1(16; 9 - 2\sqrt{43}), B_2(16; 17 - 2\sqrt{43}), C_2(16; 9 + 2\sqrt{43}).$$

3703. P kielégíti a szimmetriatengely egyenletét, tehát $PQ = PR$. QR a háromszög alapja. T legyen az alap felezőpontja. $QR: 2x + y = -5. QR \cap PT = T; T\left(-\frac{16}{5}; \frac{7}{5}\right)$. Az egyenlő szárú

háromszög száraihoz tartozó magasságai egyenlők $2 \cdot t_{PQT} = t_{PQR}, 2 \cdot \frac{QT \cdot PT}{2} = \frac{PQ \cdot m}{2},$

$$QT = \frac{6\sqrt{5}}{5}, PT = \frac{13\sqrt{5}}{5}, PQ = \sqrt{41}. m \approx 4,9.$$

3704. $P_1(-10; -11)$.

3705. Mivel PQ párhuzamos az adott egyenessel, PQ felezőmerőlegese metszi ki az egyenesből a keresett pontot. $M(4; -2)$.

3706. a) $P\left(-\frac{27}{5}; \frac{12}{5}\right)$. b) $P(11, 5; -14, 5)$.

3707. a) $m_b: x = 2; \overrightarrow{BA}(6; -6) \Rightarrow \mathbf{n}(1; -1), C(0; 0); m_c: x - y = 0; m_b \cap m_c = M;$
 $\left. \begin{array}{l} x = 2 \\ x - y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow M(2; 2)$. b) $M(-4; -1); c) M(4; -16); d) m_b: x = 0; \overrightarrow{CB} = \mathbf{n}(c; b) \Rightarrow$

$$\Rightarrow m_a: cx + by = ac. \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ cx + by = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow M\left(0; \frac{ac}{b}\right). e) \overrightarrow{AB}(3; -1), m_c: \mathbf{n}(3; -1), C(3; 5) \Rightarrow$$

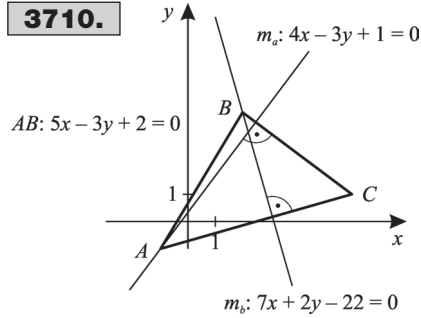
$$\Rightarrow 3x - y = 4; \overrightarrow{BC}(-1; 4), m_a: \mathbf{n}(1; -4), A(1; 2) \Rightarrow x - 4y = -7. m_a \cap m_c = M;$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x - y = 4 \quad | \cdot 4 \\ x - 4y = -7 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{23}{11}; y = \frac{25}{11} \Rightarrow M\left(\frac{23}{11}; \frac{25}{11}\right).$$

3708. a) $S\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$. A körülírt kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja.

AC felezőmerőlegese: $x + 2y = 4, AB$ felezőmerőlegese: $x = 2. K(2; 1). m_b: x + 2y = 5,$

$m_c: x = 1, M(1; 2). \vec{MS} \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3} \right),$
 $\vec{SK} \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3} \right),$ ebből: $\vec{MS} = 2 \cdot \vec{SK},$ a három pont
 egy egyenesen van. b) $S \left(\frac{5}{2}; 2 \right), K(1; 2), M(3; 2) \Rightarrow$
 \Rightarrow a három pont az $y = 2$ egyenletű egyenesre il-
 leszkedik. c) $S \left(\frac{13}{3}; 2 \right), K \left(4; \frac{7}{4} \right), M \left(5; \frac{5}{2} \right),$
 $\vec{SM} = 2 \cdot \vec{KS}.$ d) $S \left(\frac{4}{3}; 6 \right), K \left(\frac{13}{4}; \frac{13}{2} \right), M \left(-\frac{5}{2}; 5 \right), \vec{SM} = 2 \cdot \vec{KS}.$



3709. Mivel a három nevezetes pont egy egyenesen van, ezért közülük kettő meghatározza az Euler-egyenest. $141x - 35y = 212.$

3710. $AB \cap m_a = A; A(-1; -1). AB \cap m_b = B; B(2; 4). BC: 3x + 4y = 22,$
 $AC: 2x - 7y = 5. BC \cap AC = C; C(6; 1).$

3711. a) $BC: x = 2, AC: x - 4y = -14. BC \cap AC = C; C(2; 4).$ b) $C \left(5; -\frac{5}{4} \right);$
 c) $C(67; -12).$

3712. a) Az adott pont koordinátái nem elégítik ki egyik magasságvonal egyenletét sem, ezért legyen: $A(3; -4); m_b: 7x - 2y = 1; m_c: 2x - 7y = 6; AC \perp m_b, AC: 2x + 7y = -22;$
 $AC \cap m_c = C; C(-4; -2). AB \perp m_c, AB: 7x + 2y = 13; AB \cap m_b = B; B(1; 3).$

b) $B(-2; -1), C(7; -7), c) B(-11; -7), C(-0,4; 4,9).$

3713. A_1A egyenlete: $2x + y = 2. T$ az A_1F -re vonatkozó tükörképe. $T(-6; 4). TA \parallel CB \Rightarrow$
 $\Rightarrow TA$ egyenlete: $x - 2y = -14. TA \cap A_1A = A; A(-2; 6). A$ -t F -re tükrözve kapjuk a
 $B(-2; -4)$ csúcst. $BM \perp AC, AC: x + 3y = 16, BC: x - 2y = 6. AC \cap BC = C; C(10; 2).$

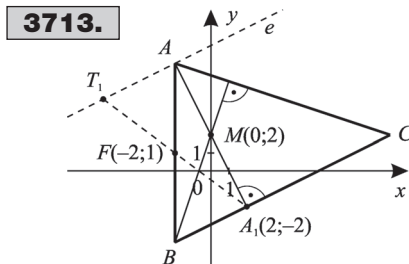
3714. Legyen $C(x_1; y_1).$ Ekkor (1) $2x_1 - 3y_1 = 0, S(x; y). \frac{-2 + 1 + x_1}{3} = x \Rightarrow x_1 = 3x + 1$ és
 $\frac{2 + 0 + y_1}{3} = y \Rightarrow y_1 = 3y - 2. Behelyettesítve (1)-be, 2(3x + 1) - 3(3y - 2) = 0 \Rightarrow 6x - 9y = -8,$

kivéve az egyenesnek azt a Q pontját, amely AB egyenesére illeszkedik, ahol $Q \left(-\frac{1}{6}; \frac{7}{9} \right).$

3715. $AS: SA_1 = 2:1 \Rightarrow A_1(9; 0). BC \perp AM, BC$ egyenlete: $2x - y = 18. AC \perp BM,$
 $\vec{BM}(b_1 - 4; b_2 + 2), AC$ egyenlete: $(b_1 - 4)x + (b_2 + 2)y = 0. BC$ felezőpontja $A_1,$ innen $b_1 + c_1 =$
 $= 18, b_2 + c_2 = 0. B$ koordinátái kielégítik BC
 egyenletét: $2b_1 - b_2 = 18, C$ koordinátái kielégítik AC egyenletét: $(b_1 - 4)c_1 + (b_2 + 2)c_2 = 0.$

A kapott $\begin{cases} b_1 + c_1 = 18; \\ b_2 + c_2 = 0; \\ 2b_1 - b_2 = 18; \\ (b_1 - 4)c_1 + (b_2 + 2)c_2 = 0 \end{cases}$ egyenlet-

rendszer megoldva kapjuk: $B(12; 6), C(6; -6).$
 A feladatnak egy megoldása van.



3716. $x = \frac{31}{11}; \quad y = -\frac{45}{11}.$

3717. a) I. megoldás: Legyen $A(3; 5), C(4; 2)$. A négyzet középpontja $K\left(\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\right)$. $\overrightarrow{KC}\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

+ 90° -kal elforgatva $\overrightarrow{KD}\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KD}$, $\overrightarrow{OD}(5; 4)$, $D(5; 4)$. D -t tükrözve K -ra: $B(2; 3)$.

II. megoldás: A keresett B , illetve D pont rajta van AC felezőmerőlegesén, és $KD = KB = KC = KA$. AC felezőmerőlegese: $x - 3y = -7$. $KA = KD \Rightarrow KA^2 = KD^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{10}{4} \cdot \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 7x - 7y + 22 = 0 \\ x = 3y - 7 \end{array} \right\} \Rightarrow y^2 - 7y + 12 = 0, \quad y_1 = 4, \quad y_2 = 3,$

$D(5; 4), \quad B(2; 3)$.

b) $\left(\frac{11}{2}; \frac{7}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; \frac{13}{2}\right)$.

3718. $C(-1; -1), \quad B(-2; 6), \quad D(6; 0)$.

3719. K -ból AD -re állított merőleges kimetszi AD felezőpontját, F -et. KF egyenlete:

$\mathbf{n}(1; 2), \quad x + 2y = 3. \quad AD \cap KF = F; \quad \left. \begin{array}{l} 2x - y = -4 \\ x + 2y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow F(-1; 2). \quad \overrightarrow{KF}(-2; 1) \quad -90^\circ\text{-kal elfor-}$

gatva: $\overrightarrow{KE}(1; 2)$. $\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{FD}$ miatt $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{OD}(0; 4) \Rightarrow D(0; 4)$. D -t F -re tükrözve: $A(-2; 0)$, A -t K -ra tükrözve $C(4; 2)$, D -t K -ra tükrözve: $B(2; -2)$.

3720. $e_1: x + 2y + 1 = 0, \quad e_2: 6x - 3y = 5, \quad e_3: 2x - y = 1, \quad e_4: 4x + 8y + 7 = 0. \quad \mathbf{n}_1(1; 2), \mathbf{n}_2(6; -3), \mathbf{n}_3(2; -1), \mathbf{n}_4(4; 8). \quad \mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_4$, illetve $\mathbf{n}_2 \parallel \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2$, illetve $\mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n}_4 = 0 \Rightarrow \mathbf{n}_3 \perp \mathbf{n}_4$. Valóban téglalapot határolnak.

3721. $D(1; 2), \quad C(7; -1)$.

3722. AC egyenlete: $y = 6$. $AC \cap AB = A; \quad A(2; 6)$. A -t M -re tükrözve: $C(22; 6)$. $AB \perp BC$, $BC: x + 3y = 40, AB \cap BC = B; \quad B(4; 12)$. B -t M -re tükrözve: $D(20; 0)$.

3723. $A(3; 3), \quad D(-1; -1), \quad B(1; 5)$.

3724. AB egyenlete: $x - 3y = -1$. $C \in y = x - 1 \Rightarrow C(c; c - 1)$. $AC = 5\sqrt{2} \Rightarrow AC^2 = 50$, $(c - 2)^2 + (c - 1 - 1)^2 = 50 \Rightarrow (c - 2)^2 = 25 \Rightarrow c - 2 = \pm 5$. $C_1(7; 6), \quad C_2(-3; -4)$. $CB \perp AB$, $C_1B: \mathbf{n}(3; 1), \quad 3x + y = 27. \quad C_2B: \mathbf{n}(3; 1), \quad 3x + y = -13. \quad AB \cap C_1B = B_1; \quad B_1(8; 3)$.

$AB \cap C_2B = B_2; \quad B_2(-4; -1)$. AC_1 felezőpontja: $K_1\left(\frac{9}{2}; \frac{7}{2}\right)$, C_1 -t K_1 -re tükrözve: $D_1(1; 4)$.

AC_2 felezőpontja: $K_2\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$, C_2 -t K_2 -re tükrözve: $D_2(3; -2)$.

3725. $B(14; 4), \quad D(-15; 6)$.

3726. BD átló egyenlete $y = x - 2$. A -t M -re tükrözve: $C(14; 6)$.

Legyen $B(b_1; b_2), \quad b_2 = b_1 - 2, \quad \overrightarrow{AB}(b_1; b_1 - 6), \quad \overrightarrow{CB}(b_1 - 14; b_1 - 8)$. $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.

$b_1(b_1 - 14) + (b_1 - 6)(b_1 - 8) = 0 \Rightarrow B_1(12; 10), \quad B_2(2; 0)$. Mivel $B_1 = D_2$ és $B_2 = D_1$, a feladatnak egy megoldása van.

3727. A téglalap középpontja: $K\left(\frac{7}{2}, 2\right)$. $AK = \frac{5}{2}$. $AK = BK \Rightarrow AK^2 = BK^2$. Legyen $B(x; y)$, ahol $x = 3y \Rightarrow B(3y; y)$. $\left(3y - \frac{7}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{25}{4}$. Így $B_1(6; 2)$, $B_2\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$. B -t K -ra tükrözve kapjuk D -t, $D_1(1; 2)$, $D_2\left(\frac{11}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

3728. Legyenek a téglalap csúcsaihoz vezető helyvektorok rendre: \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} . Ekkor, $\vec{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\vec{AB}(3; -1)$, $3 \cdot \vec{AB}(9; -3)$. \vec{AB} 90° -os elforgatottja $\vec{BC}_1(3; 9)$, illetve $\vec{BC}_2(-3; -9)$. $\mathbf{c}_1 = \mathbf{b} + \vec{BC}_1$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} + \vec{BC}_2$, $\mathbf{d}_1 = \mathbf{a} + \vec{AD}_1$, $\mathbf{d}_2 = \mathbf{a} + \vec{AD}_2$, ahol $\vec{AD}_1 = \vec{BC}_1$, $\vec{AD}_2 = \vec{BC}_2$. Innen: $C_1\left(\frac{15}{2}; 9\right)$, $C_2\left(\frac{3}{2}; -9\right)$, $D_1\left(\frac{9}{2}; 10\right)$, $D_2\left(-\frac{3}{2}; -8\right)$.

3729. Legyenek a téglalap csúcsaihoz, illetve az adott felezőponthoz vezető helyvektorok rendre \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} , \mathbf{e} , \mathbf{f} . $\vec{FE} = (\mathbf{e} - \mathbf{f})(9; -3)$, $\frac{1}{3}\vec{FE}(3; -1)$. $\frac{1}{3}\vec{FE} + 90^\circ$ -kal elforgatva: $\vec{BA} = \vec{CD}(1; 3)$. $\frac{1}{2}\vec{BA} = \vec{EA}\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. $\mathbf{a} = \mathbf{e} + \vec{EA} \Rightarrow A(4; 0)$. $\mathbf{d} = \mathbf{f} + \vec{FD}$, ahol $\vec{FD} = \vec{EA}$. Innen $D(-5; 3)$. A -t E -re, D -t F -re tükrözve: $B(3; -3)$, $C(-6; 0)$.

3730. Legyen $A(0; 0)$, $B(b; 0)$, $C(b; a)$, $D(0; a)$. $AP^2 + CP^2 = x^2 + y^2 + (x - b)^2 + (y - a)^2$, $BP^2 + DP^2 = (x - b)^2 + y^2 + x^2 + (y - a)^2$.

3731. Legyen $A(a; 0)$, $B(a; b)$, $C(0; b)$, $D(0; 0) \Rightarrow K\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$. $e_1 \parallel e_2$, $e_3 \parallel e_4$, és $e_1 \perp e_3$, $e_2; y = mx$, $e_4; y = -\frac{1}{m}(x - a)$. $e_2 \cap e_4 = A_1$, $A_1\left(\frac{a}{m^2 + 1}; \frac{ma}{m^2 + 1}\right)$. $e_1; y - b = m(x - a) \Rightarrow y = mx - ma + b$; $e_3; y = -\frac{1}{m}x + b$. $e_1 \cap e_3 = C_1$, $C_1\left(\frac{m^2 a}{m^2 + 1}; \frac{(m^2 + 1)b - am}{m^2 + 1}\right)$.

$A_1 C_1$ felezőpontja $K_1(x_1; y_1)$ $x_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{am^2}{m^2 + 1} + \frac{a}{m^2 + 1}\right] = \frac{a}{2}$,

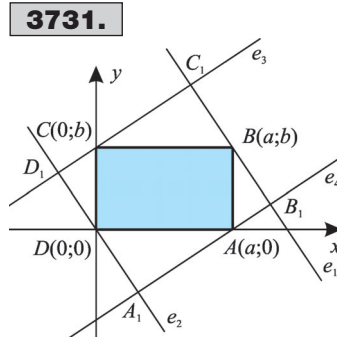
$y_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{(m^2 + 1)b - am + am}{m^2 + 1}\right] = \frac{b}{2}$. $K_1\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$.

3732. Legyen $A(0; 0)$, $B(b; 0)$, $C(b; a)$, $D(0; a)$. A szögfelező egyenlete: $y = x \Rightarrow P(b; b)$. BD egyenlete: $ax + by = ab$.

$BD \cap AP = M$; $M\left(\frac{ab}{a + b}; \frac{ab}{a + b}\right)$. AC egyenlete: $ax - by = 0$,

$y = \frac{ab}{a + b} \Rightarrow x = \frac{b^2}{a + b}$, $N\left(\frac{b^2}{a + b}; \frac{ab}{a + b}\right)$. $\vec{DB}(b; -a)$,

$\vec{NP}\left(\frac{ab}{a + b}; \frac{b^2}{a + b}\right)$. $\vec{DB} \cdot \vec{NP} = 0 \Rightarrow \vec{DB} \perp \vec{NP}$.



3733. $A(6; 6)$ illeszkedik az $x - 3y = -12$ egyenletű egyenesre. A -t K -ra tükrözve: $C(2; 2)$. $DB \perp AC$, BD egyenlete: $x + y = 8$. $AB \cap BD = B$; $B(3; 5)$. B -t K -ra tükrözve: $D(5; 3)$.

3734. AC egyenlete: $x - y = -2$. BD egyenlete $x + y = 4$.

3735. $\vec{AB}(-a; b)$ -90° -kal elforgatva $\vec{AP}(b; a)$. $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \vec{AP}$, $(a + b; a)$ BP felezőpontja $K\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$. $\vec{CB}(a; b)$, $+90^\circ$ -kal elforgatva $\vec{CS}(-b; a)$. $\mathbf{s} = \mathbf{c} + \vec{CS}$, $S(-a - b; a)$, SB felezőpontja: $L\left(-\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$. Hasonlóan: $M\left(-\frac{a+b}{2}; -\frac{a+b}{2}\right)$, $N\left(\frac{a+b}{2}; -\frac{a+b}{2}\right)$.

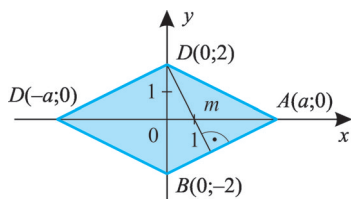
Innen $\vec{KM}(a + b; a + b)$, $\vec{LN}(- (a + b); a + b)$, tehát $\vec{KM} \cdot \vec{LN} = 0$ és $|\vec{KM}| = |\vec{LN}| \Rightarrow \Rightarrow KLMN$ négyzet.

3736. $A(-22; -12)$. $C(4; 14)$. $B(-2; -6)$. $D(-16; 8)$.

3737. BD átló $x - y = 2$. $AC : x + y = 9$. $AC \cap BD = K$; $K\left(\frac{11}{2}; \frac{7}{2}\right)$. A -t K -ra tükrözve: $C(4; 5)$.

$a = \sqrt{29}$. $AB^2 = 29$: $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 29$
 BD : $x - y = 2$ } Innen $B(9; 7)$, $D(2; 0)$.

3738.



3738. $BD = 4$, $AC = 2a$, ($a > 0$), $BC = \sqrt{a^2 + 4}$.

$$t = \frac{BD \cdot AC}{2} = BC \cdot m.$$

$$4a = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 + 4} \Rightarrow 3a^2 + 12 = 4a^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}.$$

$A(2\sqrt{3}; 0)$, $C(-2\sqrt{3}; 0)$. AB egyenlete: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$,

BC egyenlete: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$; CD egyenlete:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2, \quad AD \text{ egyenlete: } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2.$$

3739. $\vec{AB}(5; 2) \Rightarrow \vec{CD}(5; 2)$ $CD: 2x - 5y = -57$, $\vec{BP}(4; 12) \Rightarrow \mathbf{n}_{BC}(3; -1)$ $BC: 3x - y = 12$.

$CB \cap CD = C$; $C(9; 15)$. AC felezőpontja $K\left(5; \frac{19}{2}\right)$, B -t K -ra tükrözve: $D(4; 13)$. $AB = \sqrt{29}$,

$BC = 3\sqrt{10}$, innen $k = 2(\sqrt{29} + 3\sqrt{10})$.

3740. $E\left(\frac{3}{8}; \frac{39}{20}\right)$.

3741. A -t Q -ra tükrözve: $C(3; 1)$. BQ egyenlete: $2x - y = 0$; $AB: x + y = 2$. $AB \cap BQ = B$;

$B\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$. $AC = 2\sqrt{5}$, $BQ = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $BD = \frac{2\sqrt{5}}{3}$, $t = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{3} = \frac{10}{3}$ területegység.

3742. Az AC egyenlete $y = 1$. $AB = \sqrt{5}$, $C(c; 1)$. $BC = \sqrt{(c - 1)^2 + 4} = 2\sqrt{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow (c - 1)^2 + 4 = 20 \Rightarrow (c - 1)^2 = 16$. $c_1 = 5$, $c_2 = -3$, $C_1(5; 1)$, $C_2(-3; 1)$. B -t AC felezőpontjára tükrözve kapjuk a D pontot. Így $D_1(6; 3)$, $D_2(-2; 3)$.

3743. $BD = AC = 5\sqrt{5}$.

3744. $E\left(12; \frac{9}{2}\right)$, $F(9; 9)$. $AE: y = \frac{3}{8}x$, $AF: y = x$,

$BD: 3x + 2y = 30$. $AE \cap BD = P$; $P(8; 3)$, $AF \cap BD = Q$;
 $Q(6; 6)$. BD harmadolópontjai: $H_1(8; 3)$, $H_2(6; 6)$, tehát
 $P = H_1$, $Q = H_2$.

3745. $CE: dx + cy = d(d + b) + c^2$, $E: \frac{dx + cy = d^2 + db + c^2}{x=0} \Rightarrow$
 $\Rightarrow E\left(0; \frac{c^2 + d^2 + bd}{c}\right)$. $\vec{ED}\left(d; -\frac{d^2 + bd}{c}\right)$. $\vec{AC}(b + d; c)$, $\vec{ED} \cdot \vec{AC} = bd + d^2 - d^2 - bd = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{ED} \perp \vec{AC}$. Ha a paralelogramma téglalap, akkor $E = D$. A feladat állítása elemi úton is könnyen belátható. Az ACE háromszögben CD , illetve AD magasságvonalak, metszéspontja D , a háromszög magasságpontja. Így ED a harmadik magasságvonal.

3746. $C(c; 1)$, $D(-1; d)$, $A(-7; 3)$, $B(5; -7)$. $\frac{c-7}{2} = \frac{-1+5}{2} \Rightarrow c = 11 \Rightarrow C(11; 1)$,
 $\frac{d-7}{2} = \frac{1-3}{2} \Rightarrow d = 5 \Rightarrow D(-1; 5)$. $E(-4; 1)$, $F(8; -3)$, $\vec{EF}(12; -4) \Rightarrow \mathbf{n}(1; 3)$.

$EF: x + 3y = -1$ egyenesre tükrözzük a paralelogramma csúcsait. EF -re merőleges egyenesek normálvektora: $\mathbf{n}(3; -1)$. $AT_1: 3x - y = -18$. $AT_1 \cap EF = T_1 \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = -18/3 \\ x + 3y = -1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow T_1\left(-\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right)$. A -t T_1 -re tükrözve: $A_1(-4; 6)$. A_1 -t E -re tükrözve kapjuk a $D_1(-4; -4)$ pontot. Mivel $A_1D_1 \perp$ az x tengelyre, B_1C_1 is merőleges, ezért B_1C_1 egyenlete: $x = 8$.
 $\vec{DC}(12; -4) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \mathbf{n}(1; 3)$, $CD: x + 3y = 14 \Rightarrow B_1(8; 2)$. B_1 -et F -re tükrözve: $C_1(8; -8)$.

3747. $\vec{AB}(8; 4) \Rightarrow \mathbf{n}(1; -2)$, GH egyenlete: $x - 2y = -3$, BC egyenlete: $x = 8$, AD egyenlete
 $x = 0$. Innen: $G\left(0; \frac{3}{2}\right)$, $H\left(8; \frac{11}{2}\right)$. AB egyenlete: $x - 2y = 0$, DC egyenlete: $x - 2y = -12$, EF

egyenlete $x = 5$. Innen: $F\left(5; \frac{5}{2}\right)$, $E\left(5; \frac{17}{2}\right)$. $\vec{FH}(3; 3) \Rightarrow \mathbf{n}(1; -1)$, FH egyenlete: $x - y = \frac{5}{2}$,

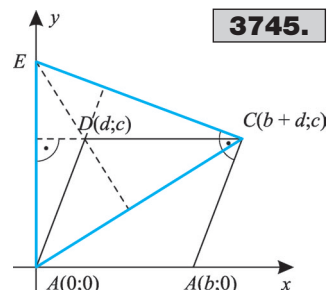
$\vec{AC}(8; 10) \Rightarrow \mathbf{n}(5; -4)$, AC egyenlete: $5x - 4y = 0$,

$\vec{GE}(5; 7) \Rightarrow \mathbf{n}(7; -5)$, GE egyenlete: $7x - 5y =$

$= -\frac{15}{2}$. $GE \cap FH = M \Rightarrow \begin{cases} 7x - 5y = -\frac{15}{2} \\ x - y = \frac{5}{2} / \cdot 5 \end{cases} \Rightarrow$

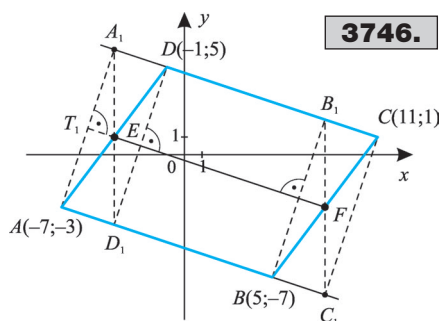
$\Rightarrow M\left(-10; -\frac{25}{2}\right)$. AC egyenletébe behelyettesít-

ve: $-50 + 4 \cdot \frac{25}{2} = 0$, így mindhárom egyenes át-
megy az M ponton.



3745.

V



3746.

3748. Tükrözzük a C pontot az AB felezőmerőlegesére. a) $F\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$, $\vec{AB}(-6; 7) \Rightarrow \Rightarrow \mathbf{n}(-6; 7)$. A felezőmerőleges $f: -6x + 7y = \frac{5}{2}$. $e \perp f$, $e: 7x + 6y = -1$. $T\left(-\frac{22}{85}; \frac{23}{170}\right)$.

C -t T -re tükrözve: $D\left(\frac{41}{85}; -\frac{62}{85}\right)$. b) $D\left(-\frac{23}{13}; \frac{2}{13}\right)$; c) $D(1,2; -6,4)$.

3749. I. megoldás: $AC = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$. $t = \frac{AC \cdot BD}{2} = 41 \Rightarrow BD = \sqrt{41}$.

$AM : MC = 3 : 2 \Rightarrow M\left(\frac{24}{5}; 6\right)$. $MC = \frac{2}{5} \cdot 2\sqrt{41} = \frac{4}{5}\sqrt{41}$. $MB = \frac{5}{8} MC \Rightarrow \frac{5}{8} \vec{MC}\left(2; \frac{5}{2}\right)$
 $+ 90^\circ$ -os elforgatottja $\vec{MB}\left(-\frac{5}{2}; 2\right)$, -90° -os elforgatottja $\vec{MD}\left(\frac{5}{2}; -2\right)$. $\vec{OB} = \vec{OM} + \vec{MB}$,
 $\vec{OD} = \vec{OM} + \vec{MD}$. Innen $B(7,3; 4)$, $D(2,3; 8)$.

II. megoldás: $MB = \frac{\sqrt{41}}{2}$, $M\left(\frac{24}{5}; 6\right)$. B , illetve D az AC -re M -ben állított merőlegesre illeszkedik

$\left\{ \begin{array}{l} 4x + 5y = \frac{246}{5} \\ x - \frac{24}{5} + (y - 6)^2 = \frac{41}{4} \end{array} \right.$ egyenletrendszer megoldása adja.

$\left. \begin{array}{l} x - \frac{24}{5} + (y - 6)^2 = \frac{41}{4} \\ 4x + 5y = \frac{246}{5} \end{array} \right\}$

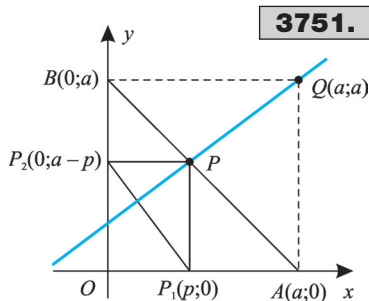
3750. a) Legyen $A(-a; 0)$, $B(a; 0)$, $M(m; 0)$. Ekkor $D(-a; a + m)$, $C(a; a - m)$, CD felezőpontja $F(0; a)$, $\vec{DC}(2a; -2m) \Rightarrow \mathbf{n}(a; -m)$. CD felezőmerőlegesére: $ax - my = -am$. AB felezőmerőlegesére: $x = 0 \Rightarrow P(0; a)$, ha $m \neq 0$. Ha $m = 0$, akkor a két felezőmerőleges egybeesik.

b) $\vec{CD}(a; -m) \Rightarrow \mathbf{n}(m; a)$, $CD: mx + ay = a^2$. $MN: \mathbf{n}(a; -m)$, $ax - my = am$. $CD \cap MN = N$;
 $\left. \begin{array}{l} ax - my = am \\ mx + ay = a^2 \end{array} \right\} \Rightarrow N\left(\frac{2a^2m}{a^2+m^2}; \frac{a^3-a^2m^2}{a^2+m^2}\right)$. $\vec{AN}\left(\frac{2a^2m}{a^2+m^2}; \frac{a^3-a^2m^2}{a^2+m^2}\right)$;

$$\vec{BN}\left(\frac{2a^2m - a^3 - am^2}{a^2+m^2}; \frac{a^3 - a^2m^2}{a^2+m^2}\right);$$

$$\vec{AN} \cdot \vec{BN} = \frac{(2a^2m)^2 - (a^3 + am^2)^2 + (a^3 - a^2m^2)^2}{(a^2+m^2)^2} =$$

$$= \frac{4a^4m^2 - 4a^4m^2}{(a^2+m^2)^2} = 0.$$



3751.

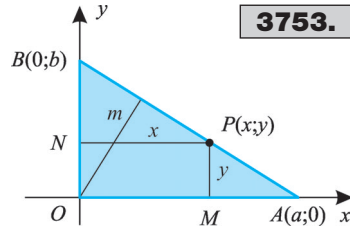
3751. Legyen $0 < p < a$, $P(p; a - p)$, $\vec{P_2P_1}(p; p - a)$, P -ből P_1P_2 -re bocsátott merőleges egyenlete: $px + (p - a)y = p^2 - (p - a)^2 \Rightarrow px + (p - a)y = 2pa - a^2$. Bármely p -re $Q(a; a)$, pont koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét.

3752. Legyen O az origó, $K(k_1; k_2)$, $L(l_1; l_2)$,
 $M\left(\frac{k_1+l_1}{2}; \frac{k_2+l_2}{2}\right)$, $K_1(-k_2; k_1)$, $L_1(l_2; -l_1)$.
 $\overrightarrow{K_1L_1}[(l_2+k_2); (l_1+k_1)]$. \overrightarrow{OM} -nak a -90° -os elforgatottja
 $\left(\frac{k_2+l_2}{2}; -\frac{k_1+l_1}{2}\right)$, ennek kétszerese. $\overrightarrow{K_1L_1}$. Ebből követ-
 kezik, hogy $\overrightarrow{K_1L_1} = 2 \cdot \overrightarrow{OM}$ és $\overrightarrow{K_1L_1} \perp \overrightarrow{OM}$.

3753. $\left. \begin{aligned} PM^2 + PN^2 = x^2 + y^2 \\ OP^2 = x^2 + y^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow PM^2 + PN^2 = OP^2$, OP^2 akkor minimális, ha $OP \perp AB$.

Az OAB háromszög területe: $t = \frac{ab}{2} = \frac{AB \cdot m}{2} \Rightarrow m = \frac{ab}{AB}$, ahol $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$. Így a keresett minimum: $m = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

3754. Legyen $A(a; 0)$, $B(b; 0)$, $C(0; c)$, $P(x; y)$. $PB^2 + PC^2 = 2 \cdot PA^2 \Rightarrow (x-b)^2 + y^2 + x^2 + (y-c)^2 = 2(x-a)^2 + 2y^2 \Rightarrow (4a-2b)x - 2cy = 2a^2 - b^2 - c^2$, ami egyenes egyenlete.



3753.

V

Pont és egyenes távolsága. Területszámítás

3755. a) $\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$, $\frac{3x + 4y + 20}{5} = 0$; b) $\frac{6x - 8y + 15}{10} = 0$;

c) $\frac{\sqrt{2}x + \sqrt{7}y - 3}{3} = 0$; d) $\frac{x - y + 3}{\sqrt{2}} = 0$.

3756. a) Az origón átmenő, az adott egyenesre merőleges egyenes egyenlete: $x - y = 0$.

$M: \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

$d = MO = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $d = \left| \frac{0 - 2 \cdot 0 + 3}{\sqrt{5}} \right| = \frac{3}{\sqrt{5}}$. c) $d = \frac{12}{5}$; d) $d = \frac{3}{10}$; e) $d = \frac{c}{\sqrt{A^2 + B^2}}$;

f) $\frac{x - y + 2^{10}}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow d = \frac{2^{10}}{\sqrt{2}} = 512\sqrt{2}$.

3757. $n(4; 3)$, $A(-2; 15) \Rightarrow m: 4x + 3y = 37$.

$\begin{cases} 3x - 4y = -16/3 \\ 4x + 3y = 37/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x - 12y = -48 \\ 16x + 12y = 148 \end{cases} \Rightarrow 25x = 100. x = 4, y = 7, M(4; 7)$.

$d = MA = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$.

3758. a) $P(1; 2)$, $f \perp e$, $f: y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

$$M: \begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{5}; \frac{8}{5}\right); \quad d = MP = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{20}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

b) $d = \left| \frac{4 \cdot (-3) - 3 \cdot 2 - 7}{5} \right| = \left| \frac{-25}{5} \right| = 5$; c) $d = \frac{47}{5}$; d) $d = 7\sqrt{2}$; e) $d = 3$;

f) $d = \frac{1}{\sqrt{13}}$; g) $d = \frac{8\sqrt{10}}{5}$.

3759. $d = \frac{27\sqrt{10}}{10}$.

3760. Az $A(7; 3)$, $B(5; 4)$ pontok kielégítik az egyenes egyenletét. Ezért:

$$\begin{cases} 7a + b = 3 \\ 5a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = \frac{13}{2}. \text{ Innen } y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2} \Rightarrow x + 2y - 13 = 0.$$

$$d = \left| \frac{2 + 2(-6) - 13}{\sqrt{5}} \right| = \frac{23}{\sqrt{5}} = \frac{23\sqrt{5}}{5}.$$

3761. $S(3; 5)$, AB egyenlete: $5x - 2y = 11$. $d = \left| \frac{15 - 10 - 11}{\sqrt{29}} \right| = \frac{6}{\sqrt{29}}$. BC egyenlete:

$$x - 4y = -23. \quad d = \left| \frac{3 - 20 + 23}{\sqrt{17}} \right| = \frac{6}{\sqrt{17}}. \quad AC \text{ egyenlete: } 2x - y = 8. \quad d = \left| \frac{6 + 5 - 8}{\sqrt{5}} \right| = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

3762. $S\left(-\frac{2}{3}; \frac{10}{3}\right)$. m_b egyenlete: $x + 2y = 8$.

$$d = \left| \frac{-\frac{2}{3} + \frac{20}{3} - 8}{\sqrt{5}} \right| = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

3763. $A(2; 1)$, $B(0; 0)$, $C(0; 3)$. $m_a = 2$; $m_b = \frac{3}{\sqrt{2}}$; $m_c = \frac{6}{\sqrt{5}}$.

3764. $A(-4; 6)$, $B(-2; -3)$, $C(4; 5)$. $m_a = 7$; $m_b = \frac{70}{\sqrt{65}}$; $m_c = \frac{70}{\sqrt{85}}$.

3765. a) $A(0; 0)$, $B(3; 4)$, $C(7; -1)$. $AB = 5$, $\vec{AB}(3; 4) \Rightarrow \mathbf{n}(4; -3)$, $4x - 3y = 0$.

$$m_c = \left| \frac{28 + 3}{5} \right| = \frac{31}{5}, \quad t = \frac{5 \cdot \frac{31}{5}}{2} = \frac{31}{2} \text{ területegység.} \quad b) \text{ Foglaljuk az } ABC \text{ háromszöget a}$$

$$CPQR \text{ téglalapba. Ekkor } t = t_{CPQR} - t_{CPB} - t_{BQA} - t_{CRA}, \quad t = 7 \cdot 8 - \frac{6 \cdot 7}{2} - \frac{2 \cdot 6}{2} - \frac{8 \cdot 1}{2} =$$

$$= 56 - 21 - 6 - 4 = 25 \text{ területegység.} \quad c) 7 \text{ területegység.}$$

3766. $d_{p,e} = \frac{0+8+5}{\sqrt{20}} = \frac{13}{\sqrt{20}} > 0$, $d_{Q,e} = \frac{2+16+5}{\sqrt{20}} > 0 \Rightarrow$ a két pont az egyenes ugyan-
azon oldalán van.

3767. a) Válasszuk ki az $A(0; -6)$ pontot a $3x - y = 6$ egyenletű egyenesen, és számítsuk ki A távolságát a másik egyenestől. $v(3; -1) \Rightarrow n(1; 3)$, $x + 3y = -18$ a merőleges egyenlete.

$$\begin{cases} 3x - y = 8 \\ x + 3y = -18 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{5}; -\frac{31}{50}\right). d = MA = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

$$b) P \in e_1, P(-5; 0), d_{P,e_2} = \left| \frac{-5+0-3}{\sqrt{5}} \right| = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}. \quad c) \frac{14\sqrt{5}}{5}; \quad d) \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

3768. A két egyenes távolsága adja a négyzet oldalának hosszát. A $3x - 5y = 10$ egyenletű

egyenes egy pontja: $P(0; -2)$. $d = \left| \frac{0-5(-2)-4}{\sqrt{34}} \right| = \frac{6}{\sqrt{34}} \Rightarrow t = \frac{36}{34} = \frac{18}{17}$ területegység.

3769. $P(k; l)$, $k, l \in \mathbf{Z}$. $d = \left| \frac{3l - 4l + 4}{5} \right| \in \mathbf{Q}$.

3770. a) A $3x + 4y + 25 = 0$ egyenletű egyenes egy pontja: $P(-3; -4)$. Az adott egyenessel
párhuzamos egyenes egyenlete: $3x + 4y + c = 0$. $\left| \frac{-9 - 16 + c}{5} \right| = 1 \Rightarrow |c - 25| = 5 \Rightarrow c_1 = 30$,

$c_2 = 20$. A keresett egyenesek: $3x + 4y + 30 = 0$, $3x + 4y + 20 = 0$. b) $4x + 3y + 16 = 0$, illetve
 $4x + 3y - 14 = 0$. c) $x - y - 8 = 0$, illetve $x - y - 4 = 0$.

3771. a) $x - y = 6$ egyenletű egyenessel párhuzamos egyenes egyenlete $f: x - y + c = 0$,
 $O(0; 0)$. $d_{0f} = \left| \frac{0-0+c}{\sqrt{2}} \right| = 6 \Rightarrow |c| = 6\sqrt{2} \Rightarrow c = \pm 6\sqrt{2}$, $f: x - y \pm 6\sqrt{2} = 0$. Ha $d = 2\sqrt{6}$,

akkor $x - y \pm 4\sqrt{3} = 0$. b) $3x + 4y + 5 = 0$, illetve $3x + 4y + 15 = 0$. c) $x + 3y + 5 = 0$, illetve
 $x + 3y - 5 = 0$. d) $y = x + 1 \pm 3\sqrt{2}$.

3772. Legyen $n(1; n) \Rightarrow x + ny = -4 + 3n \Rightarrow \frac{x + ny + 4 - 3n}{\sqrt{n^2 + 1}} = 0$. $\frac{|4 - 3n|}{\sqrt{n^2 + 1}} = 4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow n_1 = 0$, $n_2 = -\frac{24}{7} \Rightarrow x + 4 = 0$, illetve $7x - 24y + 100 = 0$.

3773. Legyen $n(1; n) \Rightarrow \frac{x + ny + 1 - 2n}{\sqrt{n^2 + 1}} = 0$, $\left| \frac{6 + n + 1 - 2n}{\sqrt{n^2 + 1}} \right| = 5 \Rightarrow n_1 = \frac{3}{4} \Rightarrow x + \frac{3}{4}y =$
 $= -1 + \frac{6}{4} \Rightarrow 4x + 3y = 2$, $n_2 = -\frac{4}{3} \Rightarrow x - \frac{4}{3}y = -1 - \frac{8}{3} \Rightarrow 3x + 4y = -11$.

3774. $P(p; 0)$, $4x - 3y + 12 = 0 \Rightarrow \frac{4p - 3y + 12}{5} = 0$. $\left| \frac{4p + 4}{5} \right| = 10 \Rightarrow p_1 = \frac{19}{2}$, $p_2 = -\frac{31}{2}$,
 $P_1 = \left(\frac{19}{2}; 0\right)$, $P_2 = \left(-\frac{31}{2}; 0\right)$.

3775. Az $A(1; 2)$ és $B(3; -5)$ pontoktól egyenlő távolságra a felezőmerőleges pontjai vannak.

$$f: 2x - 7y = \frac{29}{2} \Rightarrow 4x - 14y = 29. \text{ A } 2x - y - 3 = 0 \text{ egyenes egy pontja } P(1; -1).$$

e : a $2x - y - 3 = 0$ egyenestől 2 egységre haladó párhuzamos egyenesek. $e: 2x - y + c = 0$.

$$\left| \frac{2 + 1 + c}{\sqrt{5}} \right| = 2 \Rightarrow |c + 3| = 2\sqrt{5}. \quad c_1 = 2\sqrt{5} - 3, \quad c_2 = -2\sqrt{5} - 3. \quad e_1: 2x - y = 3 - 2\sqrt{5},$$

$$e_2: 2x - y = 3 + 2\sqrt{5}. \quad e_1 \cap f = P_1; \quad \left. \begin{array}{l} 2x - y = 3 - 2\sqrt{5} \\ 4x - 14y = 29 \end{array} \right\} \Rightarrow P_1 \left(\frac{13 - 28\sqrt{5}}{24}; \frac{23 + 4\sqrt{5}}{12} \right);$$

$$e_2 \cap f = P_2; \quad \left. \begin{array}{l} 2x - y = 3 + 2\sqrt{5} \\ 4x - 14y = 29 \end{array} \right\} \Rightarrow P_2 \left(\frac{13 + 28\sqrt{5}}{24}; \frac{4\sqrt{5} - 23}{12} \right).$$

3776. Ha $N_1 = 0, N_2 = 0$ a két egyenes normálegyenlete, akkor azon P pontok mértani helye, amelyek a két egyenestől egyenlő távolságra vannak: $N_1^2 = N_2^2 \Rightarrow (N_1 - N_2)(N_1 + N_2) = 0$.

$$N_1 - N_2 = 0, \text{ illetve } N_1 + N_2 = 0 \text{ a szögfelezők egyenlete. a) } 4x + 5y - 3 = 0 \Rightarrow \frac{4x + 5y - 3}{\sqrt{41}} = 0,$$

$$5x - 4y + 10 = 0 \Rightarrow \frac{5x - 4y + 10}{\sqrt{41}} = 0, \quad \frac{4x + 5y - 3}{\sqrt{41}} + \frac{5x - 4y + 10}{\sqrt{41}} = 0 \Rightarrow 9x + y + 7 = 0,$$

$$\frac{4x + 5y - 3}{\sqrt{41}} - \frac{5x - 4y + 10}{\sqrt{41}} = 0 \Rightarrow x - 9y + 13 = 0.$$

$$b) (3 - \sqrt{5})x + (\sqrt{5} - 1)y - \sqrt{5} = 0, \quad (3 - \sqrt{5})x - (1 + \sqrt{5})y + \sqrt{5} = 0.$$

$$c) 4x - 2y - 5 = 0, \quad -2x - 4y + 10 = 0. \quad d) x + y - 8 = 0 \text{ vagy } x - y + 2 = 0.$$

3777. Az egyenes és az x tengely által alkotott szögfelezők egyenlete: $\frac{4x - 3y + 1}{5} + y =$

$$= 0 \Rightarrow 4x + 2y + 1 = 0, \quad \frac{4x - 3y + 1}{5} - y = 0 \Rightarrow 4x - 8y + 1 = 0. \text{ Az egyenes és az } y \text{ tengely által}$$

alkotott szögfelezők egyenlete:

$$\frac{4x - 3y + 1}{5} + x = 0 \Rightarrow 9x - 3y + 1 = 0, \text{ illetve } \frac{4x - 3y + 1}{5} - x = 0 \Rightarrow x + 3y - 1 = 0.$$

3778. $AB: 12x - 5y = -60$. Mivel AB normálvektora a háromszög belsejébe mutat, ezért a belső pontok távolsága AB -re is, AC -re is pozitív.

$$AC \text{ egyenlete: } y = 0. \quad \overrightarrow{BC}(9; -12) \Rightarrow \mathbf{n}(-4; -3), \quad BC \text{ egyenlete: } -\frac{4x - 3y + 36}{5} = 0.$$

$$f_\alpha: \frac{12x - 5y + 60}{13} = y \Rightarrow 2x - 3y + 10 = 0, \quad f_\beta: \frac{12x - 5y + 60}{13} = -\frac{-4x - 3y + 36}{5} \Rightarrow,$$

$$\Rightarrow 8x + y - 12 = 0, \quad f_\gamma: \frac{-4x - 3y + 36}{5} = y \Rightarrow x + 2y - 9 = 0. \quad f_\alpha \cap f_\beta, \left. \begin{array}{l} 2x - 3y = -10 \\ 8x + y = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow O(1; 4)$$

és ez kielégíti f_γ egyenletét. A beírható kör középpontja $O(1; 4)$, $r = 4$. A belső és külső szögfe-

$$\text{lezők merőlegesek. } f_\beta: \mathbf{n}(1; -8) \Rightarrow x - 8y = -96; \quad f_\gamma: 2x - y = 18. \quad f_\beta' \cap f_\gamma': \left. \begin{array}{l} x - 8y = -96 \\ 2x - y = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow P(16; 14)$, ez a pont kielégíti f_α egyenletét.

3779. A $P(2; 5)$ ponton átmenő egyenes normálvektora legyen $\mathbf{n}(1; n)$; egyenlete:

$$x + ny = 2 + 5n \Rightarrow \frac{x + ny - 5n - 2}{\sqrt{n^2 + 1}} = 0. \quad d_{A,e} = 2 \cdot d_{BE} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{5 + 3n - 5n - 2}{\sqrt{n^2 + 1}} \right| = 2 \cdot \left| \frac{-1 - 5n - 2}{\sqrt{n^2 + 1}} \right| \Rightarrow |-2n + 3| = 2 \cdot |-5n - 3| \Rightarrow 2(-5n - 3) = -2n + 3$$

vagy $2(-5n - 3) = 2n - 3$, ahonnan: $n = -\frac{9}{8}$ vagy $n = -\frac{1}{4}$. Így $e_1: 8x - 8y = -29$

vagy $e_2: 4x - y = 3$.

3780. $e_1: \frac{5x - 3y - 6}{\sqrt{34}} = 0$, $e_2: \frac{5x - 3y - 12}{\sqrt{34}} = 0$, $P(3; b)$.

$$\left| \frac{5x - 3y - 6}{\sqrt{34}} \right| = \left| \frac{15 - 3b - 12}{\sqrt{34}} \right| \Rightarrow |3 - b| = |1 - b| \Rightarrow 3 - b \neq 1 - b; \quad 3 - b = b - 1 \Rightarrow b = 2.$$

3781. Legyen $\mathbf{n}(1; n) \Rightarrow x + ny = 2 + 5n \Rightarrow \frac{x + ny - 5n - 2}{\sqrt{n^2 + 1}} = 0$,

$$2 \cdot \left| \frac{5 + 3n - 5n - 2}{\sqrt{n^2 + 1}} \right| = 3 \cdot \left| \frac{-1 - 5n - 2}{\sqrt{n^2 + 1}} \right| \Rightarrow 2|2n - 3| = 3|5n + 3|,$$

$n_1 = -\frac{3}{19}$, $n_2 = -\frac{15}{11}$. $e_1: 19x - 3y = 23$, $e_2: 11x - 15y = -53$.

3782. Mivel $e_1 \parallel e_2$, a keresett pont az adott $e: x + y = 6$ egyenletű egyenes és az e_1, e_2 középpárhuzamosának k -nak a metszéspontja. $e_1: 3x - 4y = -12$, $e_2: 3x - 4y = 8$, $\left. \begin{matrix} E_1(0; 3) \\ E_2(0; -2) \end{matrix} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow K\left(0; \frac{1}{2}\right). \quad k: 3x - 4y = -2. \quad k \cap e = P; \quad P\left(\frac{22}{7}; \frac{20}{7}\right).$$

3783. $e_1: \frac{2x - y + 8}{\sqrt{5}} = 0$, $e_2: \frac{x - 2y - 12}{\sqrt{5}} = 0$, $P(5; 0)$. $d_1: \frac{10 + 8}{\sqrt{5}} = \frac{18}{\sqrt{5}} > 0$, $d_2: \frac{5 - 12}{\sqrt{5}} =$

$= -\frac{7}{\sqrt{5}} < 0$, ezért a szögfelező: $\frac{2x - y + 8}{\sqrt{5}} = -\frac{x - 2y - 12}{\sqrt{5}} \Rightarrow 3x - 3y = 4$. Az alap egyene-

se: $\mathbf{n}(1; 1) \Rightarrow x + y = 5$. A csúcsok: $\left. \begin{matrix} 2x - y = -8 \\ x + y = 5 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (-1; 6); \quad \left. \begin{matrix} x - 2y = 12 \\ x + y = 5 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left(\frac{22}{3}; -\frac{7}{3}\right);$

$$\left. \begin{matrix} 2x - y = 8/2 \\ x - 2y = 12 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left(-\frac{28}{3}; -\frac{32}{3}\right).$$

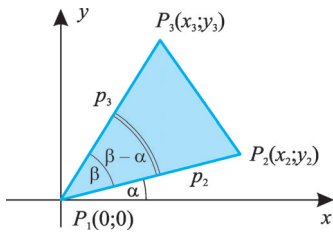
3784. $P'(11; -11)$.

3785. A visszavert fénysugár egyenlete: $8x - y = -76$. A beeső fénysugár egyenlete:

$$4x - 7y = -64.$$

3786. A visszavert fénysugár: $29x - 2y + 33 = 0$.

3787. $e: 2x - y = 5$. Tükrözzük A -t e -re, a tükörkép legyen A_1 . A_1B szakasz a két pont között a legrövidebb. A_1B messe e -t M -ben. Mivel $A_1M = AM$, így M a keresett pont. $M(2; -1)$.

3788.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{3788.} \quad T &= \frac{1}{2} \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \sin(\beta - \alpha) = \\
 &= \frac{1}{2} p_2 \cdot p_3 (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (p_3 \sin \beta \cdot p_2 \cdot \cos \alpha - p_3 \cos \beta \cdot p_2 \cdot \sin \alpha). \\
 \text{Mivel } p_3 \cdot \sin \beta &= y_3; \quad p_2 \cdot \cos \alpha = x_2; \quad p_3 \cdot \cos \beta = x_3; \\
 p_2 \cdot \sin \alpha &= y_2, \text{ ezért } T = \frac{1}{2} |x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2|.
 \end{aligned}$$

V

3789. A háromszög területe $t = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ ahol $\mathbf{a}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; 0)$, $\mathbf{b}(x_3 - x_1; y_3 - y_1; 0)$, Alkalmazzuk a vektoriális szorzat $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ együtthatóinak kiszámítására vonatkozó összefüggést. Ekkor a bizonyítandó területképletet kapjuk.

3790. a) $P_1(-2; -1), P_2(6; 1), P_3(1; 6)$. $t = \frac{1}{2} |-2(1 - 6) + 6(6 + 1) + 1 \cdot (-1 - 1)| = \frac{50}{2} = 25$ területegység. b) 20 területegység. c) $A(0; 0), B(2; 5), C(7; -1)$. $\vec{AC}(7; -1)$, $|\vec{AC}| = \sqrt{50}$, $\vec{BC}(2; 5)$, $|\vec{BC}| = \sqrt{29}$. $14 - 5 = \sqrt{50} \cdot \sqrt{29} \cos \alpha$. $\cos \alpha = \frac{9}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{29}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{37}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{29}} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{37}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{29}} = \frac{37}{2}$ területegység. d) 3,5 területegység, e) $A(4; 0), B(-4; 0), C(3; 8)$. $t = \frac{AB \cdot m_c}{2} = \frac{8 \cdot 8}{2} = 32$ területegység. f) 13 területegység.

$$\mathbf{3791.} \quad m_a = \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \quad m_b = \frac{21}{\sqrt{37}}, \quad m_c = \frac{21}{5}.$$

3792. $A(5; 1), B(-2; 2), C(c; 0)$, $t = 10$. $10 = \frac{1}{2} |5(2 - 0) - 2(0 - 1) + c(1 - 2)| \Rightarrow |12 - c| = 20$. $c_1 = 32, c_2 = -8$; $C_1 = (32; 0), C_2 = (-8; 0)$.

3793. $A(-1; -1), B(5; 2)$, $AB = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. $t = 15 = \frac{AB \cdot m_c}{2} \Rightarrow m_c = 2\sqrt{5}$. A harmadik csúcs az AB -vel párhuzamos, A -tól, illetve B -től $2\sqrt{5}$ távolságra levő egyenesen van:

$$\begin{aligned}
 \frac{x - 2y + c}{\sqrt{5}} = 0, \quad \frac{-1 + 2 + c}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} &\Rightarrow |c + 1| = 10 \Rightarrow c_1 = 9, \quad c_2 = -11. \quad e_1: x - 2y + 9 = 0, \\
 e_2: x - 2y - 11 = 0. \text{ A } C \text{ csúcs a kapott egyeneseken, } P(5; 2)\text{-től } 5 \text{ egységre van. } PC = 5 &\Rightarrow \\
 \Rightarrow PC^2 = 25. \quad \left. \begin{aligned} (x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 25 \\ x - 2y + 9 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_1(5; 7), C_2(1; 5), \text{ illetve } \left. \begin{aligned} (x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 25 \\ x - 2y - 11 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow C_3(9; -1), C_4(5; -3).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{3794.} \quad AB = 5, \quad \frac{5m_c}{2} = 8 \Rightarrow m_c = \frac{16}{5}. \quad \vec{AB}(4; -3) \Rightarrow \mathbf{n}(3; 4), \quad 3x + 4y = 12 \Rightarrow \frac{3x + 4y - 12}{5} = 0. \\
 \left| \frac{3x + 20 - 12}{5} \right| = \frac{16}{5} \Rightarrow |3x + 8| = 16 \Rightarrow x_1 = \frac{8}{3}, \quad x_2 = -8. \text{ A feltétel miatt } C\left(\frac{8}{3}; 5\right).
 \end{aligned}$$

3795. a) 14,5 területegység; b) 39,5 területegység;
c) 75 területegység; d) 30 területegység; e) 7 területegység.

3796. $AC = 15$, $BD = 10$; $AB = 5\sqrt{5}$; $AD = 5\sqrt{5}$;
 $AB = AD$ és $AC \perp BD \Rightarrow$ a négyszög deltoid.

$$t = \frac{AC \cdot BD}{2} = 75 \text{ területegység.}$$

3797. Mivel $t_{OAP} = \frac{1}{3} t_{OAB}$, P az AB szakasz A -hoz köze-

lebb eső harmadolópontja: $P\left(\frac{2a}{3}; \frac{b}{3}\right)$. $t_{OPQ} = t_{BQP} \Rightarrow Q$ az OB szakasz felezőpontja: $Q\left(0; \frac{b}{2}\right)$.

3798. A háromszög csúcsai: $C(0; -10^{-6})$; $B(-10^3; 0)$; $A(10^3; 10^{-6})$. $AC = 10^3$,
 $m_b = 10^{-6} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} = \frac{1}{2000}$ területegység.

3799. $\left|\frac{c}{3}\right| = 1 \Rightarrow c_1 = 3$ $c_2 = -3$. $A(-1; 1)$, $B(1; 2)$, $C_1(3; 0)$. $t = 3$ területegység. $A(-1; 1)$,
 $B(1; 2)$, $C_2(-3; 0)$ egy egyenesre esnek, ilyen háromszög nem létezik.

3800. Az m_c az y tengely, ezért AB párhuzamos az x tengellyel, egyenlete $y = 9$. AC egyenle-
te: $y = mx - 7$, ($m > 0$) $\Rightarrow m_b$: $y = -\frac{1}{m}x$. $A\left(\frac{16}{m}; 9\right)$;

$$B(-9m; 9). AB = \frac{16}{m} + 9m \geq 2\sqrt{\frac{16}{m} \cdot 9m} = 24,$$

$AB \geq 24$. Minimuma akkor van, ha $\frac{16}{m} = 9m \Rightarrow m = \frac{4}{3}$.
 $A(12; 9)$, $B(-12; 9)$, $AB = 24$, $m_c = 16$, $t = 192$ területegység.

3801. a) $P \cup Q$, $t_{ABCD} + t_{CDE} = 16 + 8 = 24$ területegység.
b) $Q \cup R$, $t_{BDF} + t_{AEC} - t_{ADM} = 24 + 16 - 4 = 36$ terület-
egység. c) $R \cup P$, $t_{ABCD} + t_{BDF} - \frac{1}{2} t_{ABCD} = 24 + 8 = 32$ terület-
egység.

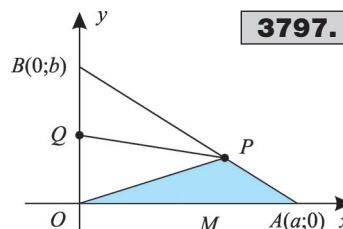
3802. $\vec{AB}(2; -4) \Rightarrow \mathbf{n}_{AB}(2; 1) \Rightarrow AB \parallel e \Rightarrow m_c = d_{A,e}$.

$$d_{A,e} = \left| \frac{-3 + 4 - 10}{\sqrt{5}} \right| = \frac{9}{\sqrt{5}};$$

$$AB = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

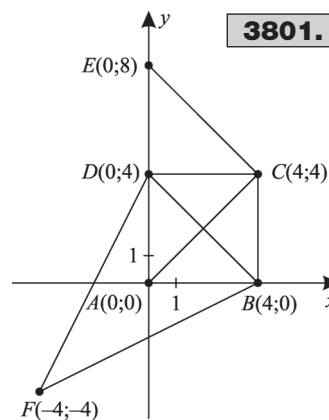
$$t = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{\sqrt{5}} \cdot 4\sqrt{5} = 18 \text{ területegység.}$$

3803. $AB = 4$, $AB: y = 5$, $C(c; 7) \Rightarrow C$ rajta van az $y = 7$
egyenletű egyenesen. $\Rightarrow m_c = 2$, $t \neq 9$. Ilyen háromszög nem
létezik. $6c - \frac{1 \cdot 4}{2} - \frac{2c}{2} - \frac{(c-1)6}{2} = 13 \Rightarrow c = 6$.

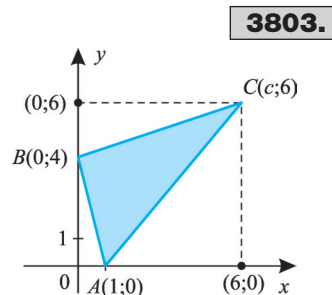


3797.

V

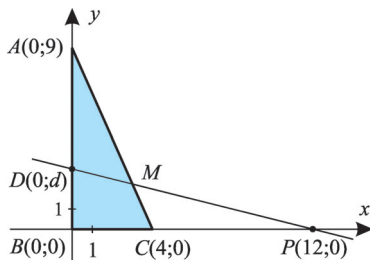


3801.



3803.

V

**3806.****3804.**

$\frac{1}{2} |1(q - q^2) + (1 + d)(q^2 - 1) + (1 + 2d)(1 - q)| = 2001$,
 $q^2d - 2dq + d = 4002$, $(q - 1)^2d = 4002 = 2 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 29$ miatt.
 $(q - 1)^2 = 1 \Rightarrow q = 2$ vagy $q = 0$, de a feladat feltételeinek
 ez utóbbi nem felel meg. $q = 2$, $d = 2001$. $B(4003; 2)$,
 $C(8005; 4)$.

3805. A $P(1; 6)$ ponton átmenő egyenesek egyenlete:

$$y - 6 = m(x - 1). \text{ A háromszög csúcsai: } \begin{cases} x - 2y = -4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(-4; 0); \begin{cases} y = mx - m + 6 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{m-6}{m}; 0\right);$$

$$\begin{cases} mx - y = m - 6 \\ x - 2y = -4 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{2(m-4)}{2m-1}; \frac{5m-6}{2m-1}\right). AB = \frac{m-6}{m} + 4 = \frac{5m-6}{m}; \quad m_c = \frac{5m-6}{2m-1};$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(5m-6)^2}{m(2m-1)} = \frac{21}{2} \Rightarrow 17m^2 + 39m - 36 = 0. \quad m_1 = \frac{12}{17}; \quad m_2 = -3. \text{ A keresett egyenesek:}$$

$$3x + y = 9, \text{ illetve } 12x - 17y + 90 = 0.$$

3806. $AD = 9 - d$, $0 < d < 9$, $AC: \frac{x}{4} + \frac{y}{9} = 1$; $DP: \frac{x}{12} + \frac{y}{d} = 1$. $AC \cap DP = M$;

$$\begin{cases} y = 9 - \frac{9}{4}x \\ y = d - \frac{dx}{12} \end{cases} \Rightarrow d - \frac{dx}{12} = 9 - \frac{9x}{4} \Rightarrow x = \frac{2(54-6d)}{27-d}. \quad t_{ABC} = 18, \quad t_{ADM} = 9 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2(54-6d)}{27-d} \cdot (9-d) \Rightarrow 2d^2 - 33d + 81 = 0. \quad d_1 = 3; \quad d_2 = 13,5, \text{ ami nem megoldás. } DM$$

egyenlete: $x + 4y = 12$.

3807. $A(10; 0)$; $B(0; 20)$; $C(0; 0)$. Az átfogóra merőleges egyenes a hosszabbik befogót

metszi, egyenlete: $y = \frac{1}{2}x + b$, ahol $0 < b < 20$. $M: \begin{cases} 2x + y = 20 \\ y = \frac{1}{2}x + b \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2(20-b)}{5}$.

$$t = \frac{1}{2} \cdot \frac{20 \cdot 10}{2} = \frac{(20-b) \cdot \frac{2}{5}(20-b)}{2} \Rightarrow (20-b)^2 = 250.$$

$$b = 20 - 5\sqrt{10} \text{ a feltétel miatt. A keresett egyenes: } y = \frac{1}{2}x + 20 - 5\sqrt{10}.$$

3808. S az AA_1 szakasz harmadolópontja: $\frac{2x+0}{3} = 4$, $\frac{2y+6}{3} = 6 \Rightarrow A_1(6; 6)$. $B(b; 0)$; A_1 a BC felezőpontja $\Rightarrow C(c; 12)$. Az AA_1B háromszög területének a kétszerese az ABC háromszög területe. $t_{ABC} = 36$ területegység.

3809. $t_{ABC} = t_{ADC} - t_{BEC} - t_{ADEB} =$
 $= \frac{1}{2} [(2^{2000} + 1)(2^{1999} - 2) - (2^{1999} - 3)(2^{2000} - 1) - (2^{1999} - 2 + 2^{1999} - 3) \cdot 2] =$
 $= \frac{1}{2} (2^{2000} - 2 \cdot 2^{1999} + 5) = \frac{5}{2}$ területegység.

3810. A háromszög harmadik csúcsa $C(c; -c)$. AB párhuzamos az x tengellyel $\Rightarrow m_c = c + 4$. CA messe az x tengelyt A_1 -ben, CB pedig B_1 -ben. $CA_1 B_1 \Delta \sim CAB \Delta \Rightarrow \frac{m_1^2}{m^2} = \frac{t_1}{t} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{c^2}{(c+4)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{c}{c+4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow c = 4(\sqrt{2} + 1)$. $C(4(\sqrt{2} + 1); -4(\sqrt{2} + 1))$.

3811. Legyen AC irányvektora $v_1(7; 6)$ $AC: 6x - 7y = -10$. BC irányvektora $v_2(1; 2)$ $BC: 2x - y = 10$. $AC \cap BC = C$; $C(10; 10)$. $AB = 4$, $m_c = 6 \Rightarrow t = 12$ területegység. Ha AC irányvektora $v_2(1; 2) \Rightarrow$
 $\Rightarrow AC: 2x - y = 2$. BC irányvektora $v_1(7; 6) \Rightarrow BC: 6x - 7y = 14$. $C(0; -2)$. Innen $m_c = 6$, $t = 12$ területegység.

3812. $A(0; 6)$, $B(b; 0)$; $AB = 10 \Rightarrow b^2 + 36 = 100$, $b = \pm 8$. $B_1(8; 0)$, $B_2(-8; 0)$. $C_1(10; 11)$. Hasonlóan $C_2(26; 11)$.

$t_{AB_1 C_1} = 50$ területegység. $t_{AB_2 C_2} = 58$ területegység.

3813. $A(4; 5)$, $S(2; 3)$, $B(b; 0)$ $C(0; c) \Rightarrow B(2; 0)$, $C(0; 4)$. $t = 9$ területegység.

3814. $s_a \cap s_b = S$; $S(1; 1)$. $t_{ABC} = 3 \cdot t_{ABS} = 51$ területegység.

3815. $t_{ABC} = t_{ABCD} - t_{ACD} = \frac{9+8}{2} \cdot 1 - \frac{9 \cdot 1}{2} = 4$ területegység. $AC: \left. \begin{matrix} y = \frac{1}{9x} \\ x = k \end{matrix} \right\} \Rightarrow y = \frac{k}{9}$,

$E\left(k; \frac{k}{9}\right)$, $G(k; 1)$, $0 < k < 9$. $t_{CGE} = 2, \frac{1}{2}(9-k)\left(1 - \frac{k}{9}\right) = 2 \Rightarrow (9-k)^2 = 36$. $9-k = \pm 6 \Rightarrow$
 $\Rightarrow k_1 = 3, k_2 = 15$, ami a feltételt nem elégíti ki. Tehát az egyenes: $x = 3$.

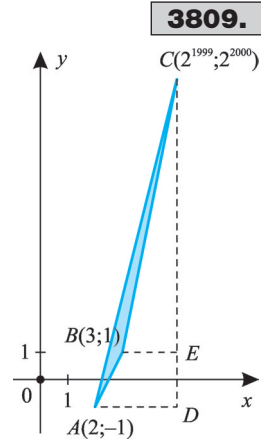
3816. $\vec{AD}(-3; 6)$, $\vec{AB}(8; 4) \Rightarrow \vec{AD} \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow \vec{AD} \perp \vec{AB}$. $AD = 3\sqrt{5}$; $AD = 3\sqrt{5}$.

$t = \frac{4\sqrt{5} + CD}{2} \cdot 3\sqrt{5} = 52,5 \Rightarrow CD = 3\sqrt{5}$. $AD = CD$, ezért \vec{CD} az \vec{AD} -90° -os elforgatottja:
 $\vec{CD}(6; 3) \Rightarrow C(5; 10)$.

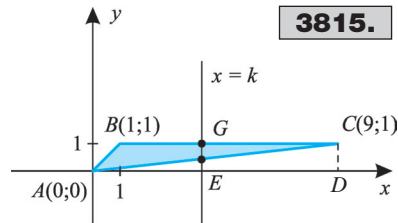
3817. $AB = 10$, $\frac{10 \cdot m_c}{2} = 40 \Rightarrow m_c = 8$. C rajta van az AB -vel párhuzamos, A -tól 8 egység távolságra levő e egyenesen. $e: \frac{3x - 4y + c}{5} = 0$,

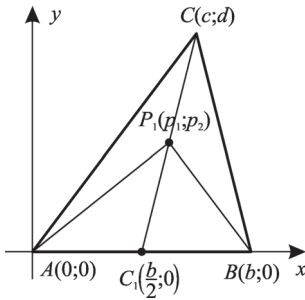
$\left| \frac{3 \cdot 6 - 4 \cdot 8 + c}{5} \right| = 8 \Rightarrow |c - 14| = 40 \Rightarrow c_1 = 54, c_2 = -26$.

$e_1: 3x - 4y + 54 = 0$, $e_2: 3x - 4y - 26 = 0$. $C_1(-10; 6)$; $C_2(6; -2)$.



V



3819.**V**

$$\mathbf{3818.} \quad M: \left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + 4 \\ y = mx \end{array} \right\} \cdot M \left(\frac{8}{2m+1}; \frac{8m}{2m+1} \right),$$

$$N \left(\frac{8}{2m+1}; 0 \right) \cdot t_{OMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{2m+1} \cdot \frac{8m}{2m+1} = \frac{32m}{4m^2 + 4m + 1} =$$

$$= \frac{32}{4m + \frac{1}{m} + 4}, \text{ mert } m > 0. \quad 4m + \frac{1}{m} \geq 2 \sqrt{4m \cdot \frac{1}{m}} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4m + \frac{1}{m} + 4 \geq 8 \Rightarrow \frac{32}{4m + \frac{1}{m} + 4} \leq 4. \text{ Egyenlőség akkor áll}$$

fenn, ha $4m = \frac{1}{m} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$.

$$\mathbf{3819.} \quad t_{ABP} = t_{BCP} = t_{ACP} = \frac{1}{3} t_{ABC}. \text{ Legyen } P(p_1; p_2). \quad t_{ABC} = \frac{b \cdot d}{2}, \quad t_{ABP} = \frac{b \cdot p_2}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{b \cdot d}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_2 = \frac{d}{3}. \quad \overrightarrow{AC}(c; d) \Rightarrow AC: dx - cy = 0 \Rightarrow \frac{dx - cy}{\sqrt{d^2 + c^2}} = 0, \quad m_b = \frac{bd}{\sqrt{d^2 + b^2}}. \quad ACP \text{ háromszög}$$

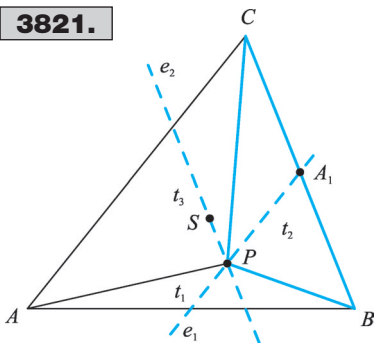
$$P\text{-ből induló magassága: } \frac{1}{3} \cdot \frac{bd}{\sqrt{d^2 + b^2}} = \frac{p_1 d - p_2 c}{\sqrt{d^2 + b^2}} \Rightarrow \frac{1}{3} bd = p_1 d - \frac{d}{3} \cdot c / d \neq 0. \quad p_1 = \frac{c + b}{3},$$

$$P \left(\frac{b+c}{3}; \frac{d}{3} \right), \quad S \left(\frac{b+c}{3}; \frac{d}{3} \right) \Rightarrow P = S.$$

$$\mathbf{3820.} \quad A_1(0;0), \quad B_1(a;a), \quad C_1(a+b;a-b), \quad D_1(b;-b). \quad \overrightarrow{A_1 B_1}(a; a), \quad \overrightarrow{C_1 D_1}(a; a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1 B_1 \parallel C_1 D_1. \quad \overrightarrow{A_1 D_1}(b; -b). \quad \overrightarrow{A_1 B_1} \cdot \overrightarrow{A_1 D_1} = ab - ab = 0 \Rightarrow A_1 B_1 \perp A_1 D_1 \Rightarrow A_1 B_1 C_1 D_1 \text{ téglalap.}$$

$$A_1 B_1 = a\sqrt{2}; \quad A_1 D_1 = b\sqrt{2}. \quad t_{ABCD} = AB. \quad t_{A_1 B_1 C_1 D_1} = a \cdot \sqrt{2} \cdot b \cdot \sqrt{2} = 2ab.$$

3821.

3821. $t_1 : t_2 : t_3 = 1 : 2 : 3$. Az ABC háromszög területe t .

Ekkor: $t_1 = \frac{1}{6}t$, $t_2 = \frac{1}{3}t$, $t_3 = \frac{1}{2}t$. Mivel $t_3 = \frac{1}{2}t$, P rajta

van az AC -vel párhuzamos középvonalon, $t_2 = \frac{1}{3}t$, P rajta

van a súlyponton átmenő BC -vel párhuzamos egyenesen. A két egyenes metszéspontja P . $S(7; 8)$, BC felezőpontja $A_1(9; 12)$, $\overrightarrow{AC}(-3; 9) \Rightarrow \mathbf{n}(3; 1)$,

$e_1: 3x + y = 39$. $\overrightarrow{CB}(18; 6) \Rightarrow \mathbf{n}(1; -3)$, $e_2: x - 3y = -17$.

$P = e_1 \cap e_2 : P(10; 9)$.